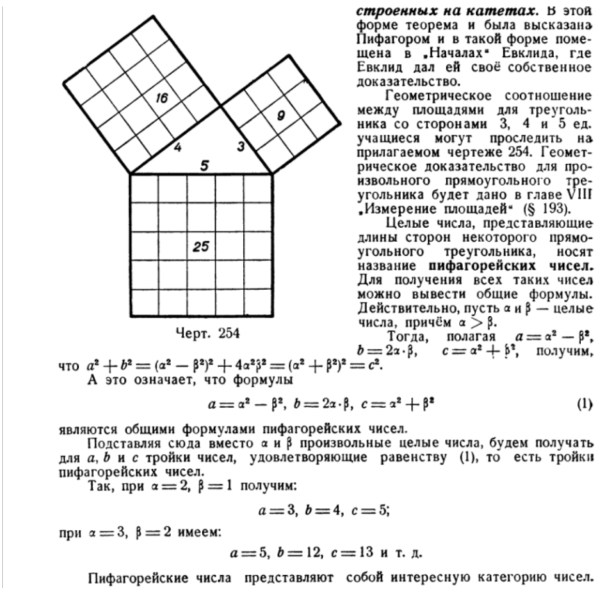
A pitagorászi számhármasokról

Az interneten találtunk az [1] munkára, mely *középiskolásoknak* írt geometriai tankönyv. Ebben az 1. ábra szerinti szövegre bukkantunk.



строенных на катетах. В этой форме теорема и была высказана Пифагором и в такой форме помещена в „Началах“ Евклида, где Евклид дал ей своё собственное доказательство.

Геометрическое соотношение между площадями для треугольника со сторонами 3, 4 и 5 ед. учащиеся могут проследить на прилагаемом чертеже 254. Геометрическое доказательство для произвольного прямоугольного треугольника будет дано в главе VIII „Измерение площадей“ (§ 193).

Черт. 254

Целые числа, представляющие длины сторон некоторого прямоугольного треугольника, носят название **пифагорейских чисел.** Для получения всех таких чисел можно вывести общие формулы. Действительно, пусть α и β — целые числа, причём $\alpha > \beta$.

Тогда, полагая $a = \alpha^2 - \beta^2$, $b = 2\alpha \cdot \beta$, $c = \alpha^2 + \beta^2$, получим, что $a^2 + b^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 = c^2$.

А это означает, что формулы

$$a = \alpha^2 - \beta^2,\ b = 2\alpha \cdot \beta,\ c = \alpha^2 + \beta^2 \quad (1)$$

являются общими формулами пифагорейских чисел.

Подставляя сюда вместо α и β произвольные целые числа, будем получать для a, b и c тройки чисел, удовлетворяющие равенству (1), то есть тройки пифагорейских чисел.

Так, при $\alpha = 2$, $\beta = 1$ получим:

$$a = 3,\ b = 4,\ c = 5;$$

при $\alpha = 3$, $\beta = 2$ имеем:

$$a = 5,\ b = 12,\ c = 13 \text{ и т. д.}$$

Пифагорейские числа представляют собой интересную категорию чисел.

1. ábra – forrása: [1]

Itt a *Pitagorász* - *tétel* kapcsán szóba hozzák a pitagorászi számokat is – ld. alább.
„Azokat az egész számokat, melyek valamely derékszögű háromszög oldalhosszait jele - nítik meg, pitagorászi számoknak nevezik. Az összes ilyen szám előállítására általános képletet lehet levezetni. Valóban, legyenek $\boldsymbol{\alpha}$ és $\boldsymbol{\beta}$ egész számok, és legyen $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta}$!
Ekkor felvéve, hogy

$$a = \alpha^2 - \beta^2\ ,\ b = 2 \cdot \alpha \cdot \beta\ ,\ c = \alpha^2 + \beta^2,$$

kapjuk, hogy

$$a^2 + b^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2 + 4 \cdot \alpha^2 \cdot \beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 = c^2\ .$$

Ez azt jelenti, hogy az

$$a = \alpha^2 - \beta^2\ ,\ b = 2 \cdot \alpha \cdot \beta\ ,\ c = \alpha^2 + \beta^2 \qquad (\ 1\ )$$

képletek a pitagorászi számok általános formulái.
Az $\boldsymbol{\alpha}$ és $\boldsymbol{\beta}$ helyébe tetszőleges egész számokat téve megkapjuk az ***a, b, c*** számhármast, amely kielégíti az (1) egyenletet, vagyis e számok *pitagorászi számhármas*t képeznek.
Így ***α = 2 , β = 1*** - gyel kapjuk, hogy ***a = 3, b = 4, c = 5***;
α = 3 , β = 2 - vel kapjuk, hogy ***a = 5 , b = 12 , c = 13*** , és így tovább.

A pitagorászi számok a számok egy érdekes csoportját képezik.”

Eddig az idézet. Ezt azért tettük ide, mert lényeges vonása, hogy nem esik a „sokat mar - kolt, de keveset fogott” hibájába, csak a legszükségesebbeket használva az algebrai isme - retek közül. Ennek ellenére egy működő, kipróbálható általános képletet adott, a hossza - dalmas, nem igazán kezdőknek szánt matematikai okfejtést mellőzve. Ezért tetszik.

Megemlítjük itt is azt a sokszor emlegetett tapasztalatunkat, miszerint a jobb képességű, nem csak szakmunkás - képzésben részt vevő tanulók sem tudnak gyakran mit kezdeni Pitagorász tételével, emiatt a pitagorászi számhármasokkal sem. Pedig tanulták Matemati - ka órán, a szakmai tantárgyak óráin, és mégsem állt össze a kép. Ennek megfelelően hiába minden további erőlködés.

Mondanivalónk lényege, hogy meglehet, nem csak a tanulók nemtanulásáról van itt szó.

További megjegyeznivalónk, hogy a pitagorászi számhármasokra ugyan példákat lehet venni a „függvénytáblázat” - ból is, de képlet nélkül nehéz lenne folytatni a sort.
A fenti (1) képlet tehát rávilágít arra is, hogy *végtelen sok* ilyen számhármas van, nem csak az a néhány, amelyek közül az első kettő a fenti példában is szerepel.

Ismét szóba hozzuk, hogy e sorok írója – és „kor - osztálytársai” is – nem az általános, ha - nem a középiskolai tanulmányai során ismerkedett meg Pitagorász tételével és a pitagorá - szi számhármasokkal. Talán ez is jelenthet valamit. Ki tudja, talán akkor már fogékonyab - bak voltunk az ilyesmire, mint egy évvel korábban.

Források:

[1] – https://sheba.spb.ru/shkola/geometr-glagolev-1954.htm

Összeállította: ***Galgóczi Gyula***
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2019. 07. 22.